

# 基于状态方程的预测最优控制

张运

(北京理工大学飞行器工程系)

史建军

(北京理工大学自动控制系)

## 摘要

本文提出了一种新的预测控制算法——基于状态方程的预测控制算法，推导了预测最优控制律；然后将该算法推广，提出一种关于高维系统的预测指标与状态预测算法以及最优预测控制算法，并给出该算法收敛的充分条件，最后介绍了该算法在导弹飞行控制系统中的应用及仿真结果。

## 一、引言

预测控制是七十年代中期以来在石油、化工等工业过程控制领域中发展起来的一类新型控制算法。近年来，预测控制已在低阶工业过程控制领域中得以应用<sup>[1][2]</sup>，基于不同的控制模型和工程背景，提出了若干种预测控制算法，如模型预测启发控制(MPHC)<sup>[1]</sup>、模型算法控制(MAC)<sup>[3]</sup>、动态矩阵控制(DMC)<sup>[4]</sup>、扩展历程自适应控制(EHAC)<sup>[5]</sup>和输出预测控制(OPAC)<sup>[6]</sup>等。根据各方面的需要，预测控制正在发展中<sup>[7]</sup>。

本文根据一类工程背景的需要，首先推导一种基于系统的状态方程描述的预测最优控制算法，然后将该算法进行推广，以解决一类状态变量与控制变量维数较高的非线性系统的反馈最优控制问题，最后列举了该算法在导弹飞行控制中的应用。

## 二、基于状态方程的预测控制算法

### 1. 控制策略思想

基于状态方程的预测控制算法(简称状态预测控制)主要用于解决一类非线性控制系统的过程控制问题，该类系统的状态方程为

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}(\mathbf{X}_k, k)\mathbf{X}_k + \mathbf{B}(\mathbf{X}_k, k)\mathbf{U}_k, \quad (2.1)$$

式中  $\mathbf{X}_k$  为  $n \times 1$  维状态向量； $\mathbf{U}_k$  为  $p \times 1$  维控制向量； $\mathbf{A}(\mathbf{X}_k, k)$  为  $n \times n$  矩阵； $\mathbf{B}(\mathbf{X}_k, k)$  为  $n \times p$  矩阵。

为讨论方便，令  $\mathbf{A}_k \triangleq \mathbf{A}(\mathbf{X}_k, k)$ ， $\mathbf{B}_k \triangleq \mathbf{B}(\mathbf{X}_k, k)$ ，则(2.1)式可写成下述形式：

本文于1987年10月17日收到，1988年6月23日收到修改稿。

$$X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k \quad (2.2)$$

依据预测控制的基本思想, 基于状态方程的预测最优控制策略可概括为以下几点:

### (1) 状态预报

在当前时刻  $k$ , 以 (2.2) 式为基础, 假定  $A_{k+l} = A_k$ ,  $B_{k+l} = B_k$ ,  $U_{k+l} = 0$  ( $l=1, 2, \dots, N$ ;  $N$  为对系统状态预报的步数). 状态在  $k+i$  时刻的预报值以  $X_{\rho k+i}$  表示, 则通过解差分方程得

$$X_{\rho k+i} = A_k^i X_k + A_k^{i-1} B_k U_k, \quad (i=1 \rightarrow N) \quad (2.3)$$

### (2) 理想 (或称期望) 状态轨迹

依据不同的控制目的和对受控系统的要求与认识, 可构造不同的理想状态轨迹, 理想状态轨迹可由适当设计的参考模型

$$X_{\rho k+i}^* = A_{\rho k+i} X_k + B_{\rho k+i} U_k + D_{\rho k+i}, \quad (i=1 \rightarrow N) \quad (2.4)$$

所决定. 式中  $X_{\rho k+i}^*$  为  $k+i$  时刻的理想状态.

理想状态轨迹的设定这里不予讨论. 下面讨论中认为  $X_{\rho k+i}^*$  已知.

### (3) 滑动预测指标

根据控制的目的, 在当前时刻  $k$  求取控制  $U_k$ , 使  $k+i$  时刻的状态预报值  $X_{\rho k+i}$  ( $i=1 \rightarrow N$ ) 以在某种指标意义上为最佳的方式逼近理想状态轨迹  $X_{\rho k+i}^*$ , 这里取如下在时间上“滑动”的预测指标

$$J_k = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^N \left( \|X_{\rho k+i} - X_{\rho k+i}^*\|_{Q_k}^2 \right) + \|U_k\|_{R_k}^2 \right], \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

式中  $Q_k$  为  $n \times n$  半正定对称阵,  $R_k$  为  $p \times p$  正定对称阵. 将 (2.3) 式的状态预报值代入 (2.5) 式中, 选  $U_k$  使  $J_k$  达到最小. 这样就将一个非线性动态系统的最优预测控制问题, 化为一个非线性静态系统的优化问题.

## 2. 状态预测控制公式的推导

将 (2.3) 式代入 (2.5) 式, 并令  $A_i^k \triangleq A_k^i$ ,  $B_i^k \triangleq A_k^{i-1} B_k$  得

$$J_k = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ \left( A_i^k X_k - X_{\rho k+i}^* + B_i^k U_k \right)^T Q_k \left( A_i^k X_k - X_{\rho k+i}^* + B_i^k U_k \right) \right] + U_k^T R_k U_k \right\} \quad (2.6)$$

因为 
$$\frac{d}{dU_k^T} \left( \frac{dJ_k}{dU_k} \right) = \sum_{i=1}^N \left( B_i^k \right)^T Q_k B_i^k + R_k \quad (2.7)$$

是正定阵, 所以  $J_k$  为  $U_k$  的凸函数. 由  $\frac{dJ_k}{dU_k} = 0$ , 解得状态预测控制的最优控制律为

$$U_k^{\circ p} = - \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ \left( B_i^k \right)^T Q_k B_i^k \right] + R_k \right\}^{-1} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^N \left( B_i^k \right)^T Q_k \left( A_i^k X_k - X_{\rho k+i}^* \right) \right\} \quad (2.8)$$

### 三、高维系统中的状态预测控制算法

对于状态变量维数和控制变量维数较高的系统, 状态预测控制算法的计算量明显增大, 难以满足实时控制要求。为此, 下面将状态预测控制进行推广, 提出一种关于高维系统的预测指标与状态预测算法以及最优预测控制算法, 并给出该算法收敛的充分条件。

#### 1. 将高维系统分解为 $m$ 个子系统以获得状态预报值

(1) 假定滑动最优指标 (2.5) 是按子系统  $S_i (i=1, \dots, m)$  可分的 ( $m < p$ )

$$J = \sum_{i=1}^m J_{ik}, \quad (3.1)$$

$$J_{ik} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ \left( X_{tph+i} - X_{tph+i}^* \right)^T Q_{ik} \left( X_{tph+i} - X_{tph+i}^* \right) + U_{ik}^T R_{ik} U_{ik} \right] \right\}, \quad (3.2)$$

式中  $J_{ik}$ 、 $X_{ik}$ 、 $U_{ik}$  分别为第  $t$  个子系统的滑动最优指标,  $n_i \times 1$  维状态向量和  $p_i \times 1$  维控制向量。  $X_{tph+i}$ 、 $X_{tph+i}^*$  分别为  $X_t$  在  $k+i$  时刻的预报值和期望值, (其中

$\sum_{i=1}^m n_i = n$ ,  $\sum_{i=1}^m p_i = p$ )。  $Q_{ik}$  为  $n_i \times n_i$  半正定对称阵,  $R_{ik}$  为  $p_i \times p_i$  对称正定阵。

(2) 将系统状态方程 (2.1) 中  $A(X_k, k)$  写成分块对角线形式, 得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_{1k+1} \\ \vdots \\ X_{tk+1} \\ \vdots \\ X_{mk+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1(X_k^o, k) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & A_t(X_k^o, k) & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & A_m(X_k^o, k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1k} \\ \vdots \\ X_{tk} \\ \vdots \\ X_{mk} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} B_{11}(X_k^o, k) \cdots B_{1t}(X_k^o, k) \cdots B_{1m}(X_k^o, k) \\ \cdots \\ B_{t1}(X_k^o, k) \cdots B_{tt}(X_k^o, k) \cdots B_{tm}(X_k^o, k) \\ \cdots \\ B_{m1}(X_k^o, k) \cdots B_{mt}(X_k^o, k) \cdots B_{mm}(X_k^o, k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{1k} \\ \vdots \\ U_{tk} \\ \vdots \\ U_{mk} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} D_1(X_k^o, k) \\ \vdots \\ D_t(X_k^o, k) \\ \vdots \\ D_m(X_k^o, k) \end{pmatrix}, \quad (3.3) \end{aligned}$$

式中  $X_k^0 = X_k$ ,  $A_i(X_k^0, k)$ ,  $B_{il}(X_k^0, k)$  分别为  $n_i \times n_i$ ,  $n_i \times p_i$  维矩阵;  $D_i(X_k^0, k)$  为与  $A(X_k^0, k)$  中非对角元素有关的向量。

令  $A_{ik} \triangleq A_i(X_k^0, k)$ ,  $B_{il} \triangleq B_{il}(X_k^0, k)$ ,  $D_{ik} \triangleq D_i(X_k^0, k)$ , 则子系统  $S_i$  中, 受控系统的状态方程和预测指标为

$$\begin{cases} J_{ik} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ (X_{t,ph+i} - X_{t,ph+i}^*)^T Q_{ik} (X_{t,ph+i} - X_{t,ph+i}^*) \right] + U_{ik}^T R_{ik} U_{ik} \right\} \\ X_{ik+1} = A_{ik} X_{ik} + \sum_{l=1}^m B_{il} \cdot U_{lk} + D_{ik}, \quad X_k^0 = X_k \\ k=0, 1, 2, \dots; \quad t=1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (3.4)$$

在子系统  $S_i$  中,  $X_k^0$  已知。由 (3.4) 式可利用与 (2.3) 中求状态预报值的同样方法求得  $X_{t,ph+i}$  为

$$X_{t,ph+i} = A_{ik}^i X_{ik} + A_{ik}^{i-1} \left( \sum_{l=1}^m B_{il} \cdot U_{lk} \right) + \left( \sum_{j=1}^i A_{ik}^{i-j} \right) D_{ik}. \quad (3.5)$$

令  $\alpha_i^i \triangleq A_{ik}^i X_{ik} + \left( \sum_{j=1}^i A_{ik}^{i-j} \right) D_{ik} - X_{t,ph+i}^*$ ,  $\beta_i^i \triangleq A_{ik}^{i-1}$  将  $X_{t,ph+i}$  代入

子系统  $S_i$  的预测指标  $J_{ik}$  中, 得

$$\begin{aligned} J_{ik} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ \alpha_i^i + \beta_i^i \left( \sum_{l=1}^m B_{il} \cdot U_{lk} \right) \right]^T Q_{ik} \left[ \alpha_i^i + \beta_i^i \left( \sum_{l=1}^m B_{il} \cdot U_{lk} \right) \right] \right. \\ \left. + U_{ik}^T R_{ik} U_{ik} \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

## 2. 最优控制律求取

为了求得高维系统在总体指标 (3.1) 意义下的最优控制律, 将 (3.6) 代入 (3.1), 并将  $J_k$  对  $U_{sk}$  ( $s=1, 2, \dots, m$ ) 求偏导得

$$\frac{\partial J_k}{\partial U_{sk}} = \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ B_{is}^T (\beta_i^i)^T Q_{ik} \alpha_i^i + B_{is}^T (\beta_i^i)^T Q_{ik} \beta_i^i \left( \sum_{l=1}^m B_{il} \cdot U_{lk} \right) \right] \right\} + R_{sk} U_{sk}. \quad (3.7)$$

(3.7) 中令  $C_{is}^i \triangleq B_{is}^T \left( \sum_{i=1}^N (\beta_i^i)^T Q_{ik} \beta_i^i \right)$ ,  $R_s \triangleq R_{sk}$ ,

$$D_{is}^i \triangleq -B_{is}^T \left( \sum_{i=1}^N (\beta_i^i)^T Q_{ik} \alpha_i^i \right),$$

再令  $C_{s1} \triangleq \sum_{i=1}^m C_{is}^i B_{il}$ ,  $D_s \triangleq \sum_{i=1}^m D_{is}^i$ , 则由  $\frac{dJ_k}{dU_k} = 0$ , 得方程组

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq s}}^m C_{sl} U_{lk} + (C_{ss} + R_s) U_{sk} = D_s, \quad (s=1, 2, \dots, m) \quad (3.8)$$

解方程组 (3.8) 就可得满足最优控制必要条件的解  $U_k^* = (U_{1k}^*, U_{2k}^*, \dots, U_{mk}^*)^T$ .  
但保证  $U_k^*$  是最优控制  $U_k^{o,p}$ , 还须有  $\frac{d^2 J_k}{dU_k^T dU_k}$  为正定阵, 至此可得定理 1.

**定理 1** 若  $\frac{d^2 J_k}{dU_k^T dU_k}$  为正定阵, 则高维系统在滑动预测指标 (3.1) 意义下的最优

$$\text{控制为 } U_k^{o,p} = - \left( \frac{d^2 J_k}{dU_k^T dU_k} \right)^{-1} J_k'(0). \left( J_k'(0) = \frac{dJ_k}{dU_k} \Big|_{U_k=0} = - (D_1^T \ D_2^T \ \dots \ D_m^T)^T \right).$$

当控制变量  $U_k$  维数较高时, 直接求得 (3.8) 的解析解是困难的, 这时须借助数值计算方法。下面推荐一种“求最优控制的迭代法”, 该迭代法将  $U_k$  按子系统  $S_i (i=1, 2, \dots, m; m < p)$  分成  $m$  个控制分量  $U_{ik}$ , 通过并行处理、迭代得到最优控制  $U_k^{o,p}$ .

(1) “求最优控制的迭代法”的迭代公式

$$U_{sk}^{(h+1)} = (C_{ss} + R_s)^{-1} \left[ D_s - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq s}}^m C_{sl} U_{lk}^{(h)} \right], \quad (s=1 \rightarrow m) \quad (3.9)$$

式中  $h$  为迭代指数,  $h=0, 1, 2, \dots$ .

(2) “求最优控制的迭代法”的算法步骤

① 将  $k-1$  时刻的最优控制作为迭代初值,  $h=0$ ,

$$U_k^{(h)} = U_k^{o,p-1}.$$

② 在协调级, 令  $U_k^o = U_k^{(h)}$ , 将  $U_k$  和  $C_{st} = \{C_{s1}, \dots, C_{sm}, D_s\}$  送给子系统  $S_i (i=1, 2, \dots, m)$ .

③ 在子系统  $S_i$  中, 由式 (3.9) 求得  $U_{ik}^{(h+1)}$ , 将结果送协调级。

④ 在协调级, 若  $\|U_k^{(h+1)} - U_k^{(h)}\| < \varepsilon (\varepsilon > 0)$ , 则令  $U_k^{o,p} = U_k^{(h+1)}$ , 否则令  $h=h+1$ ,

返回第②步。

(3) “求最优控制的迭代法”收敛性分析

作为一个迭代算法, 讨论其收敛性是必要的, 下面给出“求最优控制的迭代法”收敛的充分条件。首先定义矩阵  $H$  及其范数。

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -(C_{11} + R_1)^{-1} C_{12} & \dots & -(C_{11} + R_1)^{-1} C_{1m} \\ -(C_{22} + R_2)^{-1} C_{21} & 0 & \dots & -(C_{22} + R_2)^{-1} C_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(C_{mm} + R_m)^{-1} C_{m1} & -(C_{mm} + R_m)^{-1} C_{m2} & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

$\|H\|$ 为由欧几里德空间向量范数导出的矩阵范数,或 $\|H\| \triangleq \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $h_{ij}$ 为 $H$ 的第 $i$ 行,第 $j$ 列元素.

**定理 2** 若 $\|H\| \leq C < 1$ , ( $C$ 为常数,  $0 < C < 1$ ), 则“求最优控制的迭代法”收敛.

证 利用(3.10)将(3.9)写成如下形式:

$$U_k^{(h+1)} = H \cdot U_k^{(h)} + H_1, \quad (3.11)$$

式中

$$H_1 = \begin{bmatrix} (C_{11} + R_1)^{-1} D_1 \\ (C_{22} + R_2)^{-1} D_2 \\ \vdots \\ (C_{mm} + R_m)^{-1} D_m \end{bmatrix}.$$

在欧几里德空间 $R^p$ 中, 向量 $U_k$ 范数定义为 Euclidean 范数, 则

$$\|\Delta U_k^{(h)}\| \triangleq \left( \sum_{i=1}^p \Delta U_{ki}^{(h)2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\Delta U_k^{(h)} = U_k^{(h+1)} - U_k^{(h)}). \quad (3.12)$$

由(3.11)和(3.12)得

$$\|\Delta U_k^{(h+1)}\| = \|H \cdot \Delta U_k^{(h)}\|. \quad (3.13)$$

因为 $H$ 所定义的矩阵范数与(3.12)定义的向量的范数是相容的, 故有

$$\|\Delta U_k^{(h+1)}\| \leq \|H\| \cdot \|\Delta U_k^{(h)}\| \leq C \|\Delta U_k^{(h)}\|.$$

将 $\|\Delta U_k^{(h)}\|$ 作为 $R^p$ 空间的一个度量, 则该度量空间是完备的; 又因为 $H$ 是 $R^p \rightarrow R^p$ 的一个映射, 当满足 $\|H\| \leq C < 1$ 时,  $H$ 为压缩映射, 由压缩映射定理<sup>[8]</sup>得知(3.11)有唯一的不动点. 当 $k \rightarrow \infty$ 时,  $\|\Delta U_k^{(h)}\| = \|U_k^{(h+1)} - U_k^{(h)}\| \rightarrow 0$ , 所以 $\{U_k^{(h)}\}$ 收敛, 证毕.

### 3. 高维系统中的状态预测控制算法步骤

(1) 在 $k$ 时刻, 用当前时刻状态 $X_k^0 = X_k$ 固定原系统, 即在第二级用 $X_k^0 = X_k$ 代入 $A_i(X_k^0, k)$ ,  $B_i(X_k^0, k)$ 和 $D_i(X_k^0, k)$ ,  $t=1, 2, \dots, m$ .

(2) 在第1级利用式(3.5)并行求各子系统的状态预报值, 并将结果 $C_i^0 = \{C_{i1}^0, C_{i2}^0, \dots, C_{im}^0, C_{i1}^1\}$ 送给第2级, 则 $C_i^0$ 为子系统 $S_i$ 向第2级提供的数据.

(3) 在第2级, 由公式 $C_{s1} = \sum_{i=1}^m C_{is}^0 \cdot B_{i1}$ ,  $D_s = \sum_{i=1}^m D_{is}^1$ , 得方程组(3.8).

(4)  $U_k$ 维数不高时, 可直接解方程组得最优控制解析解; 当 $U_k$ 维数较高时, 用“求最优控制的迭代法”解方程组, 得最优控制律.

整个算法如图3.1所示。

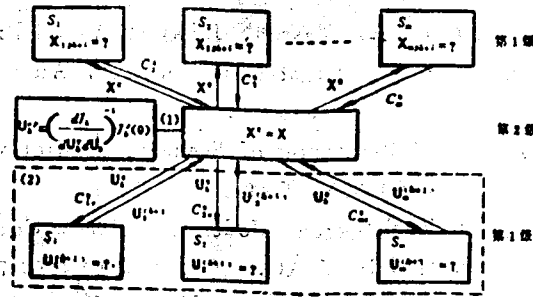


图 3.1 高维系统中的状态预测控制

注：图3.1中，(1)表示  $U_k$  维数不高条件下，求解析形式的最优控制律；(2)表示  $U_k$  维数较高时，采用“求最优控制的迭代法”解方程组(3.8)。

#### 四、状态预测控制算法的应用

将本文提出的算法用于解决某导弹拦截问题中的导弹飞行控制问题，受控系统经数学推导和变换后得到了离散非线性状态方程，其形式与(2.1)式相同。但此时： $X_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{10k})^T$  为状态向量； $U_k = (u_1, u_2, u_3)^T$  为控制向量， $A(X_k, k)$ 、 $B(X_k, k)$  为相应维数的矩阵。根据控制目的，提出如下形式的最优指标：

$$J = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^N \|X_{pk+i} - X_{pk+i}^*\|_{Q_c}^2 \right], \quad (4.1)$$

式中  $Q_c = \text{diag}(0, 0, r_1, 1, 0, 0, r_2, 1, 0, 1)$ 。

采用高维系统中的状态预测控制算法，首先根据受控对象特点，将它分解为三个子系统，即  $X_{1k} = (x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, x_{4k})^T$ ， $X_{2k} = (x_{5k}, x_{6k}, x_{7k}, x_{8k})^T$ ， $X_{3k} = (x_{9k}, x_{10k})^T$ ，同时将最优指标(4.1)也进行分解，得

$$J = \sum_{i=1}^3 J_i = \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|X_{i, pk+i} - X_{i, pk+i}^*\|_{Q_{c_i}}^2 \right\}, \quad (4.2)$$

式中  $Q_{c_i} = \text{diag}(0, 0, r_i, 1)$  ( $i=1, 2$ )； $Q_{c_3} = \text{diag}(0, 1)$ 。

采用3中相同的推导方法，可求得最优控制律，推导过程不再赘述。对该控制律进行计算机仿真，验证了闭环的稳定性，脱靶量均小于0.225米，满足导弹拦截问题要求。

用本文提出的算法设计的导弹飞行控制器，与采用古典最优控制设计的控制器比较：控制律形式更为简洁；所需内存及实时计算量大大减小；避免了剩余飞行时间的估算问题。因此该算法可有效地解决导弹拦截问题中的实时反馈控制问题。

## 参考文献

- [1] Richalet, J, A.Rault, J.L.Testud, J.Papon, Model Predictive Heuristic Control, Application to Industrial Processes, Automatica, 14, (1978), 413-423.
- [2] Richalet, J, General Principles of Scenaric Predictive Control Technique, Proc. JACC, (1980), FA9-A.
- [3] Bruijn, P.M,H.B,Verbruggen, Model Algroitmic Control Using Impulse Response Models, J-AC, 25(2), (1984), 69-74.
- [4] Culter, C.R,B.C. Ramaker, Dynamic Matrix Control-A Computer Control Algorithm, JACC San Francisco Paper, (1980), WP5-13.
- [5] Ydstie, B, Extended Horizon Adaptive Control, 9th IFAC world Congress, Budapest Hungary, paper 14. 4/E-4 (1984).
- [6] J.Gany Reid, David E. Chaffin & James T. Silverthorn, Output predictive Algorithmic Control, Precision Tracking with Application to Terrain Following, JACC, (1980), FA9-F.
- [7] R.M.C. De Keyser, Ph. G. A. Van de Velde and F. A. G. Dumortier, A Comparative Study of Self-Adaptive Long-Range Predictive Control Methods, IFAC Identification, and System Parameter Estimation, (1985), York UK.
- [8] E.克里兹格著, 张石生等译, 泛函分析引论及应用, 重庆出版社, (1986.)

## Optimal Predictive Control Based on

## the State Equation

Zhang Yun

(Department of Flight Vehicle Engineering, Beijing Institute of Technology,)

Shi Jianjun

(Department of Automatic Control, Beijing Institute of Technology)

## Abstract

In this paper, a new algorithm for optimal predictive control based on the state equation is presented and optimal predictive control law is derived and extended: a predictive index and the state prediction method on higher dimensional system are proposed. The predictive control algorithm for higher dimensional system and sufficient condition of its convergence are given also. The algorithm was applied to a missile flight control system. This application and its simulation results are introduced.