降低非线性最优控制对初始状态敏感性的多指标优化方法及应用

北京工业学院　01研究所　张　远

北京工业学院　自动控制系　史建军

摘　要

为解决非线性系统最优控制律对初始状态的敏感性问题，本文提出借助多指标优化方法优选控制器参数，从而获得可降低控制律对初始状态敏感性的优越非劣解，然后将所提方法用于某导弹末制导控制器设计中。仿真表明，用该方法求取的制导律对末制导初始状态散布及目标机动运动不敏感，在各种恶劣情况下均可准确命中目标。

一、引言

在非线性系统的最优控制问题中，最优控制律的形式与系统初始状态的取值有关，对不同的初始状态值将求得不同形式的最优控制律。在目前的非线性系统最优控制研究中，常假定系统的初始状态是已知的，在此基础上再进行最优控制律的求取。事实上，系统的初始状态通常具有一定散布，针对某一初始状态求得的“最优”控制律，在初始状态变化时，却不能满足控制的要求，因此，如何选取控制器参数以降低控制律对初始状态的敏感性，是当前的研究课题之一。

为解决非线性系统的最优控制律对初始状态的敏感性问题，本文提出借助多指标优化的概念和方法，优选控制器的参数，从而获得可降低控制律对初态敏感性的优越非劣解。最后本文将所提方法用于某型反坦克导弹末制导控制器设计中去，并对所求取的制导律进行了计算机仿真研究。

二、降低非线性最优控制律对初始状态敏感性的多指标优化方法

在非线性系统的最优控制器设计中，即使在相同的最优指标函数和状态方程约束之下，基于不同的初始状态取值，也将导致不同的最优控制律，而针对某一初态求取的最优控制律，当初态改变时，也将失去最优性。因此，我们希望求取这样一种控制律，它对某一初始状态取值而言不是最优的，但对所有初始状态而言是非劣的，这种非劣的控制律将构成一个非劣控制律集合。最后，我们借助某些分析方法和个人偏好，确定优越控制律。为达到此目的，就需要借助多指标优化的方法，下面首先介绍两个有关定义[1]。

设有多指标优化问题：

$$\min_{x \in X} \underline{f}(X) = \min_{x \in X} (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) \tag{1}$$

这里x是优化变量，X是x的可行域；$f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots f_n(x)$是指标函数，$\underline{f}(X)$是指标函数向量。

定义1：如果不存在其它的$x \in X$，使$\underline{f}(x) \leqslant \underline{f}(x^*)$，则称$x^*$是多指标优化问题(1)的非劣解；由这样的非劣解构成的集合称为非劣解集，记为X^*。

定义2：如果$x^{op} \in X^*$，且x^{op}最符合决策者偏好，则称x^{op}为优越非劣解。

下面考虑如下离散非线性控制系统：

$$\begin{cases} J = \sum_{k=0}^{N} L(\underline{X}_k, \underline{u}_k, \underline{\theta}_1) \\ \underline{X}_{k+1} = \underline{g}(\underline{X}_k, \underline{u}_k, \underline{\theta}_2) \end{cases} \tag{2}$$

式中：$\underline{\theta}_1$，$\underline{\theta}_2$为参数向量；$X^\circ = \{\underline{X}_i^\circ\}|_{i=1\to p}$，$1 \leqslant p < \infty$为初始状态集合；$\underline{X}_k$为$n \times 1$维状态向量；$\underline{u}_k$为$m \times 1$维控制向量；$L(\cdot,\cdot,\cdot)$，$\underline{g}(\cdot,\cdot,\cdot)$为非线性函数和函数向量。

设可以求得系统(2)的最优控制律$\underline{u}_k^\circ$，它是系统初始状态的函数：

$$\underline{u}_k^\circ = \underline{h}(\underline{X}_k, \underline{X}^\circ, \underline{\theta}) \tag{3}$$

式中：$\underline{\theta}$为可变参数，$\underline{\theta} \in \Theta$，$\Theta$为$\underline{\theta}$可行域，$\underline{X}^\circ \in X^\circ$，$\underline{h}(\cdot,\cdot,\cdot)$为非线性函数向量。

由(3)式可见，初始状态取值不同，将改变最优控制律$\underline{u}_k^o$，进而改变对整个系统的控制效果。为减少控制系统对初始状态取值的敏感性，我们可适当选取可变参数$\underline{\theta}$的取值，使系统在各种初始状态取值下，均能获得满意的控制效果。为此构造如下多指标优化问题：

$$\min_{\theta\in\Theta} J_m = \min_{\theta\in\Theta} (J_m^1, J_m^2, \cdots, J_m^p) \tag{4}$$

式中：$J_m^i \triangleq J_m^i(\underline{u}_k^o, \underline{x}_i^o, \underline{\theta}) \quad (i=1\to p) \tag{5}$

$J_m = (J_m^1, \cdots, J_m^p)$为指标函数向量。

$J_m^i\ (i=1\to p)$可以是求取最优控制律的指标函数，也可以是根据系统要求提出的指标函数，它反映了系统初始状态取值对系统控制效果的影响。

由(4)、(5)可见，对任一取定$\underline{\theta}^o\in\Theta$，在P维欧氏空间$E_p$中就有一个点$J_m(\underline{\theta}^o)$与之对应，因此定义由$\underline{\theta}$到$J_m(\underline{\theta})$的一个映射$J_m$，则得到一个可行集$\Theta$在映射$J_m$下的像集：

$$J_m(\Theta) = \{ J_m(\theta) \mid_{\theta\in\Theta} \} \tag{6}$$

在像集$J_m(\Theta)$即可由定义1获得多指标优化问题的有效解。

另外，当需考虑降低控制器对一些参数变化或确定性干扰的灵敏度时，只要在(4)中引入相应指标函数，也可得以解决。有关这个问题的讨论将在下面应用中进行。

三、在导弹控制系统中的应用

本文将上面所提方法用于自寻的反坦克导弹末制导控制器设计中。首先在导弹拦截问题的空间简化模型基础上，求取预测最优控制律，然后以各种初始状态取值及目标机动运动条件下的终端脱靶量为指标，对控制器的关键参数进行多指标参数优化，从而降低导弹控制器对末制导初始状态散布和目标机动运动的敏感性。

导弹拦截问题受控系统的简化空间模型为：

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 = P_1x_1 + P_2x_2\cos x_{10} + P_3u_1 + P_4x_5\sin x_{10} + P_5\sin x_{10}u_2 + P_6\sin x_{10} + P_7 \\
\dot{x}_2 = P_8x_1 + P_9x_2 + P_{10}u_1 + P_{11}x_9 + P_{12}x_6x_9 \\
\dot{x}_3 = P_{13}x_1 + P_{14}u_1 + P_{15}x_5\sin x_{10} + P_{16}\sin x_{10}u_2 + P_{17} \\
\dot{x}_4 = x_3 \\
\dot{x}_5 = P_{18}x_5 + P_{19}x_6\cos x_{10} + P_{20}u_2 - P_{19}x_2\sin x_{10} + P_{21}x_1\sin x_{10} + P_{22}\sin x_{10}u_1 \\
\dot{x}_6 = P_{23}x_5 + P_{24}x_6 + P_{25}u_2 + P_{26}x_9 + P_{27}x_2x_9 \\
\dot{x}_7 = P_{28}x_5 + P_{29}u_2 + P_{30}x_1\sin x_{10} + P_{31}\sin x_{10}u_1 \\
\dot{x}_8 = x_7 \\
\dot{x}_9 = P_{32}x_9 + P_{33}u_3 + P_{34}x_2x_6 + P_{35}x_2 + P_{36}x_6 + P_{37} \\
\dot{x}_{10} = P_{38}x_9 + P_{39}x_2\sin x_{10} + P_{40}x_6\cos x_{10}
\end{cases} \tag{7}$$

式中：$x_1, x_2, \cdots, x_{10}$为状态变量；$\underline{P}\triangleq(P_1, P_2, \cdots, P_{40})'$为已知时变参数。

根据控制的目的，提出如下形式的预测最优指标：

$$J = \int_t^{t+T} \| \underline{X}_p(\tau) - \underline{X}^*(\tau) \|_{Q_c}^2 d\tau \tag{8}$$

式中：$(t, t+T)$为状态预报区间；$\underline{X}_p(\tau) = (x_{p1}(\tau), x_{p2}(\tau), \cdots, x_{p10}(\tau))'$为预报状态轨迹；$Q_c = \mathrm{diag}(0,0,r_1,1,0,0,r_2,1,0,1)$；$\underline{X}^*(\tau)$为期望状态轨迹。

对由(7)、(8)构成的受控系统，采用预测最优控制算法，可求得解析形式最优控制律：

$$\underline{U} = \underline{U}(\underline{X}, \underline{P}, r_1, r_2) \tag{9}$$

最优控制律(9)中参数r_1, r_2的选取直接影响到控制器的控制效果，选取参数r_1, r_2应使导弹拦截问题具有最小的终端脱靶量。在导弹控制器设计中，常将若干种导弹的初始状态分布与目标机动运动类型结合起来，称为“典型情况”。对导弹控制器的评价就以各种典型情况下的终端脱靶量为依据。由于每一种典型情况均有一个脱靶量指标，所以参数r_1, r_2的选取就构成了一个多指标优化问题。

参数r_1, r_2的优化依下述步骤进行：

第1步　对一种典型情况，改变参数r_1, r_2取值进行仿真，得到一个满足脱靶量指标要求(脱靶量小于0.5米)的参数集合。

第2步　对每一种典型情况进行上述仿真，可得到一组参数集合，取这组集合的交集，则参数在此交集中取值可保证对各种典型情况均命中目标，此交集即为参数r_1, r_2取值

的可行域。

第3步　以此交集作为参数 r_1 、r_2 的约束集，选择r_1 、r_2 ，考察各种典型情况下的脱靶量构成的列向量的变化，用多指标优化的概念寻找非劣解集，然后选此集合中的一个解作为优越非劣解用于控制器设计。

下面首先给出自寻的反坦克导弹末制导拦截问题的几种典型情况，然后求取参数的约束集和非劣解集合。

（一）　导弹拦截问题的典型情况与背景

自寻的反坦克导弹末制导初始状态典型情况分A_m、B_m两种。A_m对应于导弹发射不久便捕捉到目标，进入末制导段时导弹在额定高度飞行，并在整个末制导过程中续航发动机都在工作；B_m对应于导弹发射后经过一段时间才捕捉到目标，且在末制导的后段续航发动机关车，导弹速度下降，末制导初始时刻导弹飞行高度与额定高度存在较大偏离。

目标机动运动典型情况分A_T、B_T、C_T、D_T四种。它们均对应目标各种比较常见和恶劣的运动，即在末制导初始时刻目标高速运动，且在整个末制导过程中目标加速度均不为零。其中 A_T、C_T对应于导弹典型情况A_m;B_T、D_T对应导弹典型情况B_m。C_T、D_T反映了导弹命中目标前两秒目标开始急刹车突停情况，D_T中坦克位置偏离导弹飞行方向350米，反映了由于发射瞄准误差及末制导前坦克机动给末制导造成的影响。

（二）　求满足拦截问题要求的参数约束集

为便于讨论，假定导弹滚转控制器理想工作，即滚转角和滚转角速度恒等于零，则参数r_1 ,r_2 的优化可独立进行。r_1 和r_2 的优化方法完全相同，故下面仅讨论r_1 的优化方法。

首先定义脱靶量R_{min}:

$$R_{min}(r_1\ ,\text{导弹初态},\text{目标初态})=\min_{t\in[t_0,t_f]}\sqrt{(x_T-x_m)^2+(y_T-y_m)^2} \tag{10}$$

式中：R_{min}为拦截问题在地面坐标系OXY平面上的脱靶量；(x_T,y_T)和(x_m,y_m)分别为目标和导弹在地面坐标系的坐标；t_0,t_f分别为导弹末制导初始时刻和命中时刻。

将参数 r_1 ,r_2 的取值代入最优控制律(9)中，由计算机仿真及式(10)可求得R_{min}，将部分结果列于表1。由表1可见，满足脱靶量要求的r_1 取值可行域为：$a\leqslant r_1\leqslant b$。

其中：$a\in(0.0001,\ 0.001)$，$b\in(0.02,\ 0.03)$

表1.　参数r_1 与R_{min}关系表　（R_{min}单位：米）

r_1	$R_{min}(r_1\ ,A_m,A_T)$	$R_{min}(r_1\ ,A_m,C_T)$	$R_{min}(r_1\ ,B_m,B_T)$	$R_{min}(r_1\ ,B_m,D_T)$
0.0001	>0.5	>0.5	>0.5	>0.5
0.001	0.11097	0.04533	0.03112	0.45532
0.002	0.01300	0.01298	0.03371	0.01007
0.008	0.01711	0.05781	0.06348	0.04096
0.01	0.05321	0.09492	0.08627	0.13421
0.02	0.00830	0.26376	0.05614	0.28585
0.03	>0.5	>0.5	>0.5	>0.5

（三）　用多指标优化概念优化参数

解一个多指标优化问题，关键问题之一是确定多指标优化问题的非劣解集以及在此集中确定出优越非劣解。为解决表1中的多指标参数优化问题，我们首先介绍“总体权衡系数”和“局部权衡系数”的概念[2]。

对多指标优化问题(1)，设$x^0\in X$ ，$x^*\in X$；$\underline{f}(x^0)=(f_1(x^0),f_2(x^0),\cdot\cdot,f_n(x^0))$和$\underline{f}(x^*)=(f_1(x^*),f_2(x^*),\cdot\cdot\cdot,f_n(x^*))$ 是分别与x^0和x^*对应的指标函数值向量。用$T_{kj}(x^0,x^*)$表示变量x由x^*变为x^0时，f_k 的变化值与f_j 的变化值之比：

$$T_{kj}(x^0,x^*)\triangleq(f_k(x^0)-f_k(x^*))/(f_j(x^0)-f_j(x^*)) \tag{11}$$

定义3：如果$f_l(x^0)=f_l(x^*)$ $(l=1,2,\cdot\cdot,n;\ l\neq k;\ l\neq j)$，则称$T_{kj}(x^0,x^*)$为$f_k$和$f_j$在$x^0$与$x^*$之间的局部权衡系数。如果$f_l(x^0)\neq f_l(x^*)$ $(l\neq k,l\neq j)$至少对$l=1,2,\cdot\cdot$，中的某一个l成立，则称$T_{kj}(x^0,x^*)$为f_k 和f_j 在x^0与x^*之间的全局权衡系数。

由上述定义可建立权衡系数与非劣解关系。

定理[2]：$x^* \in X^*$，X^*是非劣点集，则x^*是非劣解的充要条件为对任意一个$x \in X^*$，$(x \neq x^*)$，至少存在一对k和j，使得$T_{kj}(x, x^*)$为负。

权衡系数$T_{kj}(x^c, x^*)$不仅可以用来判定一个满足约束的变量是否为非劣解，在确定了多指标优化问题的非劣解集后，$T_{kj}(x^c, x^*)$还可以为决策者选定优越非劣解提供参考依据。当x^c, x^*为非劣解集中的两个元素时，由$T_{kj}(x^c, x^*)$定义可见，$T_{kj}(x^c, x^*)$反映了第j个目标函数f_j减少单位数量，f_k所付出的代价，从而为决策者提供了非劣解集内部的一些信息。

由于在非线性最优控制器设计中，在给定系统初始状态和参数取值情况下，均能求得对应的指标值，因此权衡系数概念将是解决这类问题的一个有力工具。对表1所示参数优化问题，由定理可得到多指标优化的非劣解集及对应指标集，如表2所示。

表2. 参数r 的非劣解集及对应指标集

r_1	R_{a1}	R_{a2}	R_{a3}	R_{a4}
$r_{a1}=0.01$	0.11097	0.04533	0.03112	0.45533
$r_{a2}=0.002$	0.01300	0.01298	0.03371	0.01007
$r_{a3}=0.02$	0.00830	0.26376	0.05614	0.28585

在表2中R_{a1}、R_{a2}、R_{a3}、R_{a4}分别表示$R_{min}(r_1, A_m, A_T)$、$R_{min}(r_1, A_m, C_T)$、$R_{min}(r_1, B_m, B_T)$和$R_{min}(r_1, B_m, D_T)$。

在参数r_1的非劣解集中寻找优越非劣解，可用权衡系数作参考。由表2得到部分权衡系数列于表3。

表3. 参数r_1 权衡系数表[注]

	R_{a1}/R_{a3}	R_{a2}/R_{a3}	R_{a4}/R_{a3}	
r_{a1}/r_{a2}	-37.826	-12.490	-171.91	$R_{a3}(r_{a1})-R_{a3}(r_{a2})<0$
r_{a3}/r_{a2}	-0.210	11.181	12.30	$R_{a3}(r_{a3})-R_{a3}(r_{a2})>0$

注：(1) R_{ai}/R_{a3} (i=1,2,4) 表示第i个指标函数与第3个指标函数之间的权衡系数。

(2) r_{ai}/r_{a2} (i=1,3) 表示参数r_1取值由r_{ai}变到r_{a2}。

由表3可见，参数r_1在非劣解集内由r_{a1}改为r_{a2}时，R_{a3}增大1单位，则另三个指标函数值将分别减小37.8、12.5、171.9单位数量，因此认为r_{a2}比r_{a1}优越。同理可进行r_{a2}与r_{a3}的比较，最后确定$r_1=0.002$为r_1的优越非劣解。

采用与r_1同样的优选步骤，可确定$r_2=0.015$为r_2的优越非劣解。

（四） 计算机仿真结果

为评定用本文所提方法设计的导弹控制器性能，我们用它对导弹的真实模型[3]进行了仿真，全部仿真均在 MC68000微机上完成。仿真内容包括导弹末制导初始状态存在散布，目标在地面沿各方向变加速运动、突停等情况，仿真结果表明：在各种情况下，导弹拦截问题的终端脱靶量均满足设计要求，控制器对系统的初始状态散布和目标的机动运动不敏感，达到了预期的目的。

四、 结论

本文提出，在非线性系统的最优控制器设计中，可采用多指标优化的方法优选控制器的关键参数，以降低控制器对初始状态取值的敏感性，并对该方法进行了一般讨论。然后，将该方法用于某型自寻的反坦克导弹末制导控制器设计中去，应用中同时考虑了降低控制器对末制导初始状态散布和目标机动运动的灵敏度问题，借助权衡系数的概念确定了控制器参数的优越非劣解。仿真表明，所设计控制器在导弹末制导初始状态存在散布和目标机动运动等各种恶劣条件下，均能准确命中目标。

参考文献

[1] 魏权龄、王日爽等《数学规划与优化设计》 国防工业出版社 1984

[2] Yacov.Y.Haimes &Vira Chankong " Kuhn-Tucker Multipliers as Trade-offs in Multiobjective Decision-Making Analysis" Automatica Vol.15 pp59-75

[3] 张运、安汲“自寻的导弹拦截问题的数学模型及其仿真” 北京工业学院学报 2,1986. pp79-86